Opción A

Modelo3 Ejercicio 1 Opción A sobrantes 1996

[2'5 puntos]. El número de bacterias en un cultivo experimental en un instante t es
$N(t) = 1000(25 + t\cdot e^{-t/20})$, para $0 \le t \le 100$.
¿Cuanto valen el máximo y el mínimo número de bacterias y en qué instantes se alcanzan, respectivamente dichos valores, extremos?

Solución

$N(t) = 1000(25 + t\cdot e^{-t/20})$, para $0 \le t \le 100$.
Estudiamos su derivada
$N'(t) = 1000(e^{-t/20} + t.\ e^{-t/20}(-1/20)) = 1000.\ e^{-t/20}.(1 - t/20)$
Si $N'(t) = 0$ tenemos $.(1 - t/20) = 0$, puesto que 1000 y $e^{-t/20}$ nunca valen cero, de donde t = 20 que será el máximo o mínimo relativo.
Como la función N(t) es continua y derivable los máximos y mínimos absolutos se alcanzan en los extremos del intervalo o en los extremos relativos. El valor mayor será el máximo absoluto y el valor menor será el mínimo absoluto. En nuestro caso los valores son t = 0, t = 20 y t = 100
$N(0) = 1000(25 + 0) = 25000$
$N(20) = 1000(25 + 20.e^{-1}) \cong 32357'5882$
$N(100) = 1000(25 + 100.e^{-5}) \cong 25134'75894$
El máximo de bacterias es 32357'5882 y se alcanza para t = 20
El mínimo de bacterias es 25000 y se alcanza para t = 0

Modelo3 Ejercicio 2 Opción A sobrantes 1996.

Un objeto se mueve a lo largo de una línea recta debido a la acción de una fuerza F que depende continuamente de la posición x del objeto en dicha línea recta. Se sabe que el trabajo realizado por la fuerza para mover el objeto desde x = a hasta x = b viene dado por $W = \int_{+a}^{+b} F(x)\,dx$.

(a) [1'5 puntos] Si ha fuerza es $F(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$, calcula el trabajo para ir desde x = 3 hasta x = 5.

(b) [1 punto]. Determina razonadamente si la fuerza $G(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^2}$ realiza más o menos trabajo que la fuerza F anterior para el mismo desplazamiento.

Solución

$W = \int_{+a}^{+b} F(x)dx$

a)

$$I = \int_{+a}^{+b} F(x)\,dx = \int_3^5 \frac{2}{(x-1)^2}dx = \left[\frac{-2}{(x-1)}\right]_3^5 = (-2/4) - (-2/2) = 1/2$$

b)

Para calcular $\int \frac{2}{(x^2+1)^2}dx$ utilizaremos el método de Hermite para integrar funciones con raíces múltiples
(No entra en el temario ni en los conocimientos que puede tener un alumno de 2º de Bachillerato)
Se realiza la siguiente descomposición

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{p(x)}{Q_{-1}(x)}\right] + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{Mx+N}{(x-c)^2+d^2} + \ldots$$

Donde $Q_{-1}(x)$ es un polinomio que tiene las mismas raíces de Q(x) pero con el orden de multiplicidad una unidad inferior, y p(x) un polinomio de coeficientes indeterminados pero con un grado inferior a $Q_{-1}(x)$.
Una vez hecha la descomposición, se obtienen los coeficientes indeterminados por derivación, se reduce a común denominador para igualar e identificar los términos del numerador.
En nuestro caso

$$\frac{2}{(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{Ax+B}{(x^2+1)}\right] + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

Derivando

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{Ax+B}{(x^2+1)}\right] = \frac{a(x^2+1)-(Ax+B)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-Ax^2-2Bx+A}{(x^2+1)^2}$$, por tanto

$$\frac{2}{(x^2+1)^2} = \frac{-Ax^2-2Bx+A}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$, igualando numeradores tenemos

$2 = -Ax^2 - 2Bx + A + Mx^3 + Mx + Nx^2 + N$, igualando coeficientes
0 = M
0 = - A + N
0 = -2B + M, de donde B = 0 porque M = 0.
2 = A + N
Resolvemos el sistema
0 = - A + N
2 = A + N, obteniéndose N = 1, y N = A= 1 por tanto

$$\frac{2}{(x^2+1)^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{Ax+B}{(x^2+1)}\right]+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{(x^2+1)}\right]+\frac{1}{x^2+1}$$. Integramos ya

$$\int_3^5\frac{2}{(x^2+1)^2}dx=\left[\frac{x}{x^2+1}\right]_3^5+\int_3^5\frac{1}{(x^2+1)}dx=\left[\frac{x}{x^2+1}+\mathrm{artg}(x)\right]_3^5=\left(\frac{5}{26}+\mathrm{artg}(5)\right)-\left(\frac{3}{10}+\mathrm{artg}(3)\right)\cong -0'016662687...$$

Con lo cual la función G(x) realiza menos trabajo que la F(x) para el mismo desplazamiento.

Modelo3 Ejercicio 3 Opción A sobrantes 1996.

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix}1&\alpha&-1\\2&-1&\alpha\\1&10&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Para qué valores de α no tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema anterior?
(b) [1'5 puntos] Discute sus soluciones según los valores de α e interpreta geométricamente el resultado.

Solución

a)

$$\begin{pmatrix}1&\alpha&-1\\2&-1&\alpha\\1&10&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$$

Sea $A=\begin{pmatrix}1&\alpha&-1\\2&-1&\alpha\\1&10&-6\end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix}1&\alpha&-1&2\\2&-1&\alpha&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema dado. Calculamos el determinante de A.

$|A| = \begin{vmatrix}1&\alpha&-1\\2&-1&\alpha\\1&10&-6\end{vmatrix} = 1(6 - 10\alpha) - \alpha(-12 - \alpha) + (-1)(20 + 1) = \alpha^2 + 2\alpha - 15$

Resolvemos |A| = 0, es decir $\alpha^2 + 2\alpha - 15 = 0$ y obtenemos como soluciones $\alpha = 3$ y $\alpha = -5$

Si $\alpha = 3$ y $\alpha = -5$ no existe inversa de la matriz A

b)

Si $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq -5$ el sistema es compatible y determinado y tiene solución única. Geométricamente son tres planos independientes que se cortan en un punto

Si $\alpha = 3$

Tenemos $\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&3\\1&10&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix}$ = -1 – 6 = - 7 ≠ 0 tenemos que rango(A) = 2.

Como $\begin{vmatrix}1&3&2\\2&-1&5\\1&10&1\end{vmatrix}=0$, rango(A*) = 2.

Como rango(A) = rango(A*) = 2 el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.
Como los tres planos son independientes dos a dos, y hay solución, geométricamente son tres planos independientes que pertenecen al haz de planos generado por dos de ellos cualesquiera.

Si $\alpha = -5$

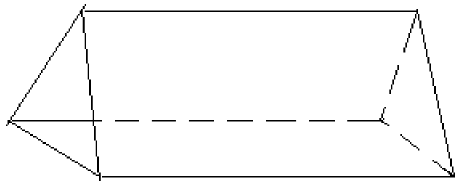
Tenemos $\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$ -1 + 10 = + 9 ≠ 0 tenemos que rango(A) = 2.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} =$ - 24 ≠ 0, rango(A*) = 3.

Como rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3 el sistema es incompatible.

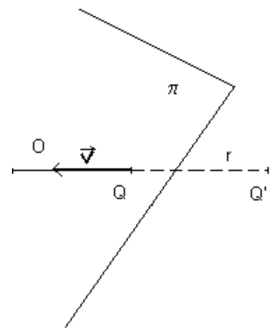
Como los tres planos son independientes dos a dos, y no hay solución, geométricamente son tres planos independientes que se cortan dos a dos formando una tienda de tienda canadiense.



Modelo3 Ejercicio 4 Opción A sobrantes 1996.

[2'5 puntos] Determina el punto simétrico del (0, 0, 0) respecto del plano de ecuación x + 2y + 3z = 1 y calcula el cuadrado de la distancia entre dichos puntos (el (0,0,0) y su simétrico).

Solución



x + 2y + 3z = 1

Calculamos la recta "r" perpendicular al plano π que pasa por el punto O(0,0,0). Su vector director es el vector normal del plano **v** = **n** = (1,2,3)

$r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ x=3\lambda \end{cases}$

El punto Q es la intersección de la recta "r" con el plano π.

(λ) + 2(2λ) + 3(3λ) = 1; 14λ = 1, de donde λ = 1/14

Q ((1/14), 2(1/14), 3(1/14)) = Q(1/14, 2/14, 3/14)

Q es el punto medio del segmento OQ', siendo Q' el punto simétrico buscado.

(1/14, 2/14, 3/14) = (x/2, y/2, z/2) de donde Q' es Q'(2/14, 4/14, 6/14)

La distancia entre ambos puntos es el modulo del vector que determinan

OQ' = (2/14, 4/14, 6/14)

d(O,Q') = ||**OQ'**|| = $\sqrt{(2/14)^2+(4/14)^2+(6/14)^2} = \sqrt{56}/14$ u.

Opción B

Modelo3 Ejercicio 1 Opción B sobrantes 1996.

Considera la curva de ecuación y = x$\sqrt{x}$ (x ≥ 0)

(a) [1'5 puntos]. ¿Cuál es el punto de la curva más cercano al punto P = (1/2, 0)

(b) [1 punto] Deduce de forma razonada si existe o no un punto en la curva que sea el que está más lejos de P.

Solución

a)

$y = x\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$

El punto mas cercano al punto P(1/2, 0) es el que minimiza la distancia d(P,X) = **||PX||**, siendo X el punto X(x, $x\sqrt{x}$)

PX = (x – 1/2, $x\sqrt{x}$)

f(x) = **||PX||** = $\sqrt{(x-1/2)^2+(x\sqrt{x})^2} = \sqrt{(x-1/2)^2+(x)^3}$

f '(x) = $\dfrac{2(x-1/2)+3x^2}{2\sqrt{(x-1/2)^2+x^3}}$

De f '(x) = 0 obtenemos $2(x – 1/2) + 3x^2 = 0 = 3x^2 + 2x – 1$. Resolviendo la ecuación nos quedan como soluciones x = -1 y x = 1/3. Como en el enunciado del problema nos dicen que x ≥ 0, la solución válida es x = 1/3.

Veamos x = 1/3 es un mínimo

Como f '(0) = -1 < 0, f(x) es decreciente en (-∞,1/3)

Como f '(1) = 4/(+) > 0, f(x) es creciente en (-∞,1/3)

Por tanto por definición x = 1/3 es un mínimo.

El punto más próximo es (1/3, $1/3\sqrt{1/3}$)

b)

El punto más próximo de la curva al punto P, que es (1/3, $1/3\sqrt{1/3}$) está en la recta perpendicular a dicha curva que pasa por P, por tanto hay infinitos puntos de la curva que están a mayor distancia del punto mas próximo (1/3, $1/3\sqrt{1/3}$), puesto que hay infinitas rectas que pasan por P(1/2, 0), cortan a la curva $y = x\sqrt{x}$ y no son perpendiculares con ella.

Modelo3 Ejercicio 2 Opción B sobrantes 1996.

[2'5 puntos]. De todas las primitivas de la función $f : \Re \to \Re$ dada por f (x) = 1 + x |x| determina aquélla cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

Solución

f(x) = 1 + x |x| = $\begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 1-x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Como nos dicen que pasa por el punto (1,0) calculamos la primitiva de la rama de arriba (x ≥ 0)

F(x) = $\int (1 + x^2)dx = x + x^3/3 + K$

F(1) = 0, de donde 0 = 1 + 1/3 + K, y por tanto K = - 4/3

La función pedida es $F(x) = x + x^3/3 – 4/3$

Modelo3 Ejercicio 3 Opción B sobrantes 1996.

[2'5 puntos]. Discute, según los valores de a, la posición relativa de la recta r de ecuaciones

$r \equiv \begin{cases} 2x+2y+(a+1)z = 3 \\ -x+y+z = 1 \end{cases}$, respecto del plano ax + 2y + 3z = 3.

Solución

Lo que hacemos es estudiar la posición relativa de los tres planos siguientes, según los valores de "a"

2x + 2y +(a+1)z = 3

- x+ y + z = 1

ax + 2y + 3z = 3

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & a+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el de la matriz ampliada A*

= $\begin{pmatrix} 2 & 2 & a+1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a+1 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC \\ 3^aC+1^aC \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & a+3 \\ -1 & 0 & 0 \\ a & a+2 & a+3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{saco factor} \\ \text{comun a+3} \end{matrix} = (-1)(-1)(a+3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a + 3)(2 – a)$

Si a ≠ - 3 y a ≠ 2 rango(A) = 3 el sistema es compatible y determinado y tiene solución única, por tanto la recta y el plano se cortan en un único punto

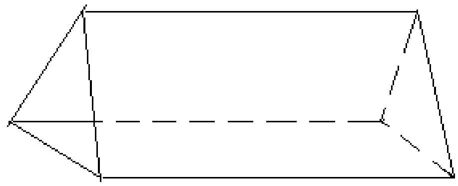
Si a = - 3 la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC + 1^aC \\ 3^aC + 1^aC \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, luego rango(A*) = 3

Como rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3 por tanto el sistema es incompatible y no tiene solución, por tanto la recta y el plano no se cortan en ningún punto. Como los tres planos son independientes dos a dos, geométricamente son tres planos independientes que se cortan dos a dos formando una tienda de tienda canadiense.



Si a = 2 la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ por tener dos filas iguales, luego rango(A*) = 2

Como rango(A) = 2 = rango(A*) el sistema es compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones. Geométricamente vemos que la ecuación del plano coincide con una de las dos ecuaciones de la recta.

Modelo3 Ejercicio 4 Opción B sobrantes 1996.

Dado $x \in \Re$, considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ -\text{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

(a) [1 punto]. Calcula $A \cdot A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A

(b) [1'5 puntos]. Prueba que A tiene inversa y hállala

Solución

a)

$$A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ -\text{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix}; \ A^t = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\text{sen}(x) \\ \text{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$A.A^t = \begin{pmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ -\text{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(x) & -\text{sen}(x) \\ \text{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(x)+\text{sen}^2(x) & 0 \\ 0 & \cos^2(x)+\text{sen}^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que es la matriz unidad I.

b)

Una matriz A cuadra tiene inversa si existe otra matriz cuadrada B tal que A.B = I matriz unidad, y por el apartado a) hemos visto que $A.A^t$ = I, luego A tiene inversa y su inversa es su traspuesta A^t